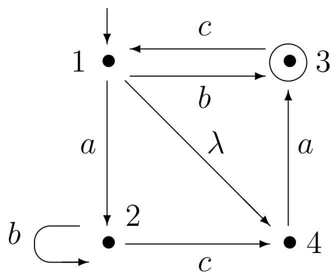
Tentamen Talen en Automaten, 30 juni 2008

Tijdsduur 3 uur. Gesloten boek tentamen.

Voorzie alle in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Formuleer kort en zakelijk, scherp en zorgvuldig, met steekhoudende argumenten voor je beweringen. Werk netjes. Schrijf duidelijk leesbaar.

Als het tentamen is nagekeken, kun je het inzien bij Wim H. Hesselink, Bernoulliborg kamer 374.

Opgave 1 (11 %). Beschouw de NFA-λ met het alphabet $\{a, b, c\}$, de toestanden 1, 2, 3, 4, en de starttoestand 1.



(a) Bepaal de λ-afsluitingen van de toestanden van deze automaat.
(b) Construeer uit deze NFA-λ op systematische wijze een DFA voor dezelfde taal. Geef de volledige overgangstabel van de DFA inclusief starttoestand en accepterende toestand(en). Hoeveel toestanden heeft deze DFA?

Opgave 2 (10 %). Bepaal op systematische wijze een reguliere expressie voor de taal van de automaat van opgave 1. Alleen een antwoord is niet genoeg.

Opgave 3 (18 %).
(a) Formuleer het Pomplemma voor *reguliere* talen.
(b) De taal L_3 over het alfabet $\{a, b\}$ wordt gegeven door de contextvrije grammatica

$$S \rightarrow aS \mid aSa \mid b\ .$$

Beschrijf de taal L_3 als verzameling. Bewijs dat de taal L_3 niet regulier is.

Opgave 4 (11 %). De taal L_4 over $\Sigma = \{a, b\}$ wordt voortgebracht door de grammatica

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aB \\ B &\rightarrow aB \mid aBA \mid b \\ A &\rightarrow a\ . \end{aligned}$$

Beschrijf een desgewenst uitgebreide stapelautomaat (*extended PDA*) M die taal L_4 accepteert. Geef duidelijk aan, wat de toestandsruimte Q, het stapelalfabet Γ en de overgangsfunctie δ zijn.

Z.O.Z.

Opgave 5 (10 %). Beschouw de taal L_5 over het alfabet $\{a, b, c\}$ die voortgebracht wordt door de contextvrije grammatica G met de nonterminals S (startsymbool), A, B, en de productieregels

$$\begin{array}{lcl} S & \to & aA \mid B \\ A & \to & cA \mid Bc \\ B & \to & \lambda \mid Sb\ . \end{array}$$

Leid uit grammatica G een nieuwe grammatica G' af met $L(G') = L_5$ waarin het startsymbool geen recursieve variabele is en die geen λ-producties heeft behalve eventueel vanuit het startsymbool.

Opgave 6 (10 %). Ontwerp een meerbands Turing machine M met invoeralfabet $\Sigma = \{a, b\}$, die de taal $L_6 = \{a^m b^n \mid m^2 = n\}$ accepteert, en die voor elke invoer eindigt. Geef aan welke toestanden $q \in Q$ je gebruikt. Zorg dat duidelijk blijkt dat $L(M) = L_6$ en dat M op elke invoer eindigt.

Opgave 7 (6 %). We beschouwen een taal L over een alfabet Σ.
(a) Wanneer is taal L *recursief opsombaar*? Geef de definitie.
(b) Wanneer is taal L *recursief*? Geef de definitie.

Opgave 8 (24 %). We beschouwen de klasse van Turing machines met één tweezijdig oneindige band, zonder accepterende toestanden, met het invoeralfabet $\{0, 1\}$ en het bandalfabet $\{0, 1, B\}$.
(a: 6 %) Laat zien hoe een willekeurige TM uit deze klasse gecodeerd kan worden als een string in $\{0, 1\}^*$.

Laat L_{tm} de verzameling van deze TM-coderingen zijn. Voor elke TM-codering $w \in L_{tm}$ definiëren we $T(w)$ als de door w gecodeerde Turing machine, en $L(T(w))$ als de taal die door Turing machine $T(w)$ geaccepteerd wordt.
(b: 2 %) Laat zien dat L_{tm} een reguliere taal is.
(c: 5 %) Is $L(T(w))$ recursief voor elke $w \in L_{tm}$? Is $L(T(w))$ recursief opsombaar voor elke $w \in L_{tm}$? Geef argumentatie.
(d: 4 %) Specificeer “de” universele Turing machine U in termen van L_{tm} en $T(w)$.
(e: 7 %) Definieer L_8 als de taal van de TM-coderingen die door hun eigen Turing machine geaccepteerd worden, dus $L_8 = \{w \in L_{tm} \mid w \in L(T(w))\}$. Toon aan dat L_8 recursief opsombaar is.